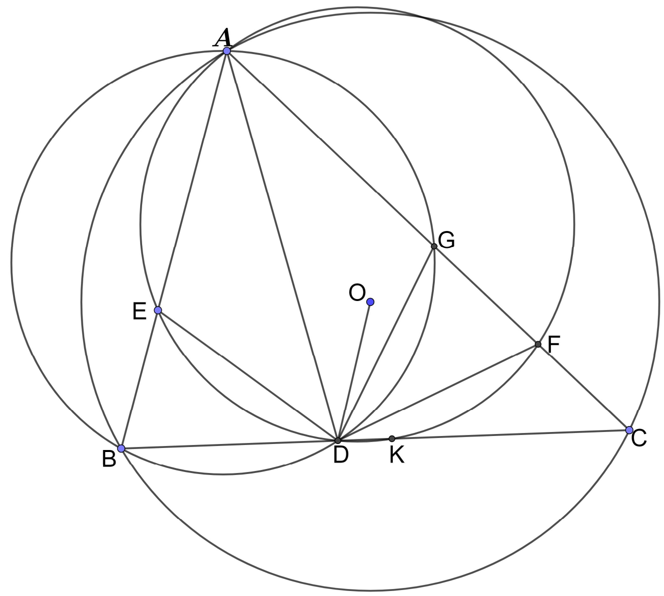
TRƯỜNG ĐẠI HỌC SƯ PHẠM HÀ NỘI
TRƯỜNG THPT CHUYÊN

KÌ THI THỬ VÀO LỚP 10 THPT NĂM 2024
LẦN 2
ĐÁP ÁN TOÁN CHUYÊN
(Dành cho mọi thí sinh thi thử chuyên toán, tin)

<table>
<tr><th>Câu</th><th>Gợi ý – Thang điểm</th><th>Điểm</th></tr>
<tr><td rowspan="2">Câu I.1
1.5 điểm</td><td>Ta có $k^4+4=\left(k^2+2\right)^2-4k^2=\left(k^2-2k+2\right)\left(k^2+2k+2\right)=\left[(k-1)^2+1\right]\left[(k+1)^2+1\right]$</td><td>0,5</td></tr>
<tr><td>Nhân cả tử số và mẫu số của K với 2^{4n} ta có:
$$K=\frac{\left(4^4+4\right)\left(8^4+4\right)\left(12^4+4\right)\ldots\left((4n)^4+4\right)}{\left(2^4+4\right)\left(6^4+4\right)\left(10^4+4\right)\ldots\left((4n-2)^4+4\right)}$$
$$=\frac{\left(3^2+1\right)\left(5^2+1\right)\left(7^2+1\right)\left(9^2+1\right)\ldots\left[(4n-1)^2+1\right]\left[(4n+1)^2+1\right]}{\left(1^2+1\right)\left(3^2+1\right)\left(5^2+1\right)\left(7^2+1\right)\ldots\left[(4n-3)^2+1\right]\left[(4n-1)^2+1\right]}$$
$$=\frac{(4n+1)^2+1}{2}=8n^2+4n+1=4n^2+(2n+1)^2$$
Vậy K có thể viết được thành tổng của 2 số chính phương.</td><td>1,0</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Câu I.2
1.5 điểm</td><td>Từ hệ ta có
$$\left(x^4-x^3-x+1\right)+\left(y^4-y^3-y+1\right)+\left(z^4-z^3-z+1\right)=0$$
$$\Leftrightarrow (x-1)^2\left(x^2+x+1\right)+(y-1)^2\left(y^2+y+1\right)+(z-1)^2\left(z^2+z+1\right)=0 \quad (1)$$</td><td>1,0</td></tr>
<tr><td>Nhận xét $x^2+x+1==\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}>0$
Do đó phương trình (1) có nghiệm duy nhất $x=y=z=1$. Thử lại thỏa mãn.
Vậy hệ có nghiệm duy nhất là (1;1;1).</td><td>0,5</td></tr>
<tr><td>Câu II.1
(1.5 điểm)</td><td>(1) $\Leftrightarrow (x-a)(x-b)=x-c \Leftrightarrow x^2-(a+b+1)x+ab+c=0$
Ta có
$$\Delta_1=(a+b+1)^2-4(ab+c)=(a+b)^2+2(a+b)+1-4(ab+c)$$
$$=(a-b)^2+2(a+b-2c)+1$$
Tương tự $\Delta_2=(b-c)^2+2(b+c-2a)+1$ và $\Delta_3=(c-a)^2+2(c+a-2b)+1$</td><td>0,5</td></tr>
</table>

	Nhận xét $\Delta_1+\Delta_2=(a-b)^2+2(a+b-2c)+1+(b-c)^2+2(b+c-2a)+1$ $=(a-b)^2+(b-c)^2+2(b-a)+2(b-c)+2$ $=(b-a+1)^2+(b-c+1)^2\ge 0$ Tương tự ta chứng minh được $\Delta_2+\Delta_3\ge 0$ và $\Delta_3+\Delta_1\ge 0$ Do đó ít nhất 2 trong 3 phương trình phải có nghiệm.	***1,0***
Câu II.2 *(1,5 điểm)*	**TH1:** Nếu $a+b\,\vdots\, p$ thì $c+d\,\vdots\, p$. Khi đó $a^{2025}+b^{2025}\,\vdots\, a+b\,\vdots\, p$ và $c^{2025}+d^{2025}\,\vdots\, c+d\,\vdots\, p$. Do đó $a^{2025}+b^{2025}\equiv c^{2025}+d^{2025}\pmod p$ **TH2**: Nếu $a+b\not\vdots\, p$ Ta có $a+b\equiv(c+d)\pmod p$. Do đó $a^3+b^3-c^3-d^3=(a+b)(a^2-ab+b^2)-(c+d)(c^2+d^2-cd)$ $\equiv(a+b)(a^2+b^2-ab-c^2-d^2+cd)\pmod p$ $\equiv(a+b)\left((a+b)^2-(c+d)^2-3(ab-cd)\right)\pmod p$ Vì $a+b\not\vdots\, p$, $(a+b)^2-(c+d)^2\,\vdots\, p$ và $3\not\vdots\, p$ nên $ab\equiv cd\pmod p$. Kết hợp điều kiện $a+b\equiv c+d\pmod p$ suy ra $(a-b)^2\equiv(c-d)^2\pmod p$ Khi đó $\left[\begin{array}{l}a-b\equiv c-d\pmod p\\ a-b\equiv d-c\pmod p\end{array}\right.$. Mà $a+b\equiv c+d\pmod p$ và p lẻ, suy ra $\left[\begin{array}{l}a\equiv c\pmod p\\ a\equiv d\pmod p\end{array}\right.$ Nếu $a\equiv c\pmod p$ thì $b\equiv d\pmod p$ và do đó $a^{2025}+b^{2025}\equiv c^{2025}+d^{2025}\pmod p$ Nếu $a\equiv d\pmod p$ thì $a\equiv c\pmod p$ và do đó $a^{2025}+b^{2025}\equiv c^{2025}+d^{2025}\pmod p$. ***) Cách 2**: Từ $ab\equiv cd\pmod p$ kết hợp với điều kiện $a+b\equiv c+d\pmod p$ và $a^3+b^3\equiv c^3+d^3\pmod p$, quy nạp ta suy ra $a^{2n+1}+b^{2n+1}\equiv c^{2n+1}+d^{2n+1}\pmod p$.	***1.5***

Câu III.1 *(1.5 điểm)*	 a) Ta có $BK.BD = BE.BA$ và $CK.CD = CF.CA$, suy ra $\frac{BK.BD}{CK.CD} = \frac{BE.BA}{CF.CA}$ Mặt khác theo tính chất đường phân giác $\frac{BD}{CD} = \frac{AB}{AC}$, do đó $\frac{BK}{CK} = \frac{BE}{CF}$ hay $BK.CF = CK.BE$.	***1,5***
Câu III.2 *(1.5 điểm)*	b) **Cách 1:** Từ $BK.CF = CK.BE$ suy ra $\frac{BK}{BE} = \frac{CK}{CF} = \frac{BK+CK}{BE+CF} = \frac{BC}{BE+CF}$ Do đó $BE + CF = BC.\frac{BE}{BK} = BC.\frac{BD}{BA}$ không đổi do tam giác ABC cố định. **Cách 2**: Gọi G là giao điểm thứ hai của đường tròn (ABD) với AC. Dễ thấy G cố định. Vì AD là phân giác của $\widehat{BAC}$ nên $DG = DB$ và $DE = DF$. Ta có $\widehat{GDF} = \widehat{EDB}$ (vì $\widehat{EDF} = \widehat{BDG} = 180^0 - \widehat{BAC}$). Do đó $\Delta GDF = \Delta BDE(c.g.c)$. Từ đây suy ra $BE = GF$. Ta có $BE + FC = GF + FC = GC$ không đổi.	***1,5***
Câu IV *(1 điểm)*	Vì 23 là số nguyên tố nên tích các số trên bảng chia hết cho 23 nhưng không chia hết cho 23^2, do đó tích của 23 số đó không thể là số chính phương và số luôn cần xóa là	***1,0***

	số $23!$. Xét tích 22 số còn lại $1!.2!...22! = (1!.3!.5!...21!).(2!.4!...22!) = (1!.3!.5!...21!).(1!.2.3!.4...21!.22)$ $= (1!.3!.5!...21!)^2.2.4.6...22 = (1!.3!.5!...21!)^2.2^{11}.11!$ Ta có thể xóa tiếp 2 số là 2! và 11!, khi đó tích các số còn lại là $(1!.3!.5!...21!)^2.2^{10}$ là số chính phương. Ta chỉ ra không thể xóa ít hơn 3 số. Xét $P = (1!.3!.5!...21!)^2.2^{11}.11!$ Dễ thấy số mũ của 11 trong phân tích của P ra thừa số nguyên tố là số lẻ, do đó P không là số chính phương. Do đó ta cần xóa thêm ít nhất 1 số nữa Giả sử có thể xóa 2 số, tức là ngoài số 23!, ta chỉ xóa thêm 1 số nữa. Số thứ hai cần xóa là một số chia hết cho 11 nhưng không chia hết cho 11^2, số đó có dạng $k!$ với $11 \le k < 22$ Ta có số mũ của 13 trong khai triển $1!.2!...22!$ ra tích các thừa số nguyên tố bằng 10, do đó $k < 13$ vì nếu trái lại, sau khi xóa k! thì số mũ của 13 trong tích còn lại sẽ là số lẻ, tích còn lại không thể là số chính phương. Nếu k=11 thì tích còn lại là $(1!.3!.5!...21!)^2.2^{11}$ không là số chính phương Nếu k=12 thì tích còn lại là $\frac{(1!.3!.5!...21!)^2.2^{11}}{12} = \frac{(1!.3!.5!...21!)^2.2^{9}}{3} = (5!...21!)^2.2^{10}.6$ không là số chính phương. Vậy nếu xóa 2 số thì tích còn lại không chính phương. Vậy ta cần xóa ít nhất 3 số.	